අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය – 2023

සංයුක්ත ගණිතය

≈ ත්‍රිකෝණමිතිය ≈

Manoj Solangaarachchi
_(B. Sc.)_

(01) සාධනය කරන්න.

(i) $\cos^4 A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$

(ii) $\sqrt{\sec^2 A + \text{cosec}^2 A} = \tan A + \cot A$

(iii) $(\text{cosec}\, A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A) = 1$

(iv) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \text{cosec}\, A - \cot A$

(v) $\dfrac{\sin A}{1 + \cos A} + \dfrac{1 + \cos A}{\sin A} = 2\,\text{cosec}\, A$

(vi) $\dfrac{\text{cosec}\, A}{\text{cosec}\, A - 1} + \dfrac{\text{coesc}\, A}{\text{cosec}\, A + 1} = 2\sec^2 A$

(vii) $(\sec A + \cos A)(\sec A - \cos A) = \tan^2 A + \sin^2 A$

(viii) $\dfrac{1}{\sec A + \tan A} = \sec A - \tan A$

(ix) $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2\sec A \tan A + 2\tan^2 A$

(x) $\dfrac{\tan A}{1 - \cot A} + \dfrac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A\,\text{cosec}\, A + 1$

(xi) $(\sin A + \cos A)(\cot A + \tan A) = \sec A + \text{cosec}\, A$

(xii) $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$

(xiii) $\dfrac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{\cot^2 A}{1 + \cot^2 A} = 1$

(xiv) $\sec^4 A(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(xv) $\sec^2 A + \text{cosec}^2 A = \sec^2 A\,\text{cosec}^2 A$

(xvi) $2(\sin^6 A + \cos^6 A) - 3(\sin^4 A + \cos^4 A) + 1 = 0$

(xvii) $\dfrac{\sin^3 A + \cos^3 A}{\sin A + \cos A} + \dfrac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 2$

(xviii) $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2$

(xix) $(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

(xx) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{2}{\sin A}$

(xxi) $\sin^8 A - \cos^8 A = (\sin^2 A - \cos^2 A)(1 - 2\sin^2 A \cos^2 A)$

(xxii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A + 7$

(xxiii) $\cot^4 A - \tan^4 A = 2\sec^2 A - \sec^4 A - 2\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^4 A$

(xxiv) $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \dfrac{1 + \sin A}{\cos A}$

(xxv) $\dfrac{\cot A + \operatorname{cosec} A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} = \dfrac{1 + \cos A}{\sin A}$

---

(02) සාධනය කරන්න.

(i) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

(iii) $\sin(45° + A)\cos(45° - B) - \sin(45° - B)\cos(45° + A) = \sin(A + B)$

(iv) $\sin(45° + A)\cos(45° - B) + \cos(45° + A)\sin(45° - B) = \cos(A - B)$

(v) $\sin 105° + \cos 105° = \cos 45°$

(vi) $\sin\{(n + 1)A\}\sin\{(n - 1)A\} + \cos\{(n + 1)A\}\cos\{(n - 1)A\} = \cos 2A$

(vii) $\sin\{(n + 1)A\}\sin\{(n + 2)A\} + \cos\{(n + 1)A\}\cos\{(n + 2)A\} = \cos A$

(viii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

(ix) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
$= 2\cos^2 A - 1$
$= 1 - 2\sin^2 A$

(x) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

(xi) $\tan(45°+A) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$ (xii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

(xiii) $\tan 56° = \dfrac{\cos 11°+\sin 11°}{\cos 11°-\sin 11°}$ (xiv) $\tan 9° = \dfrac{\cos 36°-\sin 36°}{\cos 36°+\sin 36°}$

(xv) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (xvi) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(xvii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(xviii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(xix) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

(xx) $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

(xxi) $\cos 4A = 1 - 8\cos^2 A + 8\cos^4 A$

(xxii) $\tan 4A = \dfrac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1-6\tan^2 A+\tan^4 A}$

(xxiii) $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$

(xxiv) $\cos 6A = 32\cos^6 \mathrm{A} - 48\cos^4 \mathrm{A} + 18\cos^2 \mathrm{A} - 1$

(xxv) $\tan 3A\tan 2A\tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

---

(03) ඔප්පු කරන්න.

(i) $\dfrac{\sin 7A - \sin 5A}{\cos 7A + \cos 5A} = \tan A$ (ii) $\dfrac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$

(iii) $\dfrac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $\dfrac{\sin 7A - \sin A}{\sin 8A - \sin 2A} = \cos 4A\sec 5A$

(v) $\dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \tan(A-B)$

(vi) $\cos(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin(45°+A)\cos(45°+B)$

(vii) $\dfrac{\tan 5A + \tan 3A}{\tan 5A - \tan 3A} = 4\cos 2A\cos 4A$

(viii) $\dfrac{\cos 3A - \cos A}{\sin 3A - \sin A} + \dfrac{\cos 2A - \cos 4A}{\sin 4A - \sin 2A} = \sin A \sec 2A \sec 3A$

(ix) $\dfrac{\sin (4A - 2B) + \sin (4B - 2A)}{\cos (4A - 2B) + \cos (4B - 2A)} = \tan (A + B)$

(x) $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A + \sin 7A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A + \cos 7A} = \tan 4A$

(xi) $\dfrac{\sin A + 2 \sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2 \sin 5A + \sin 7A} = \dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$

(xii) $\cos 3A + \cos 5A + \cos 7A + \cos 15 A = 4 \cos 4A \cos 5A \cos 6A$

(xiii) $\sin A + \sin 2A + \sin 4A + \sin 5A = 4 \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{3A}{2} \sin 3A$

(xiv) $\sin 10° + \sin 50° - \sin 70° = 0$

(xv) $\sin 10° + \sin 20° + \sin 40° + \sin 50° - \sin 70° - \sin 80° = 0$

(xvi) $\sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{7A}{2} + \sin \dfrac{3A}{2} \sin \dfrac{11A}{2} = \sin 2A \sin 5A$

(xvii) $\cos 2A \cos \dfrac{A}{2} - \cos 3A \cos \dfrac{9A}{2} = \sin 5A \sin \dfrac{5A}{2}$

(xviii) $\sin A \sin (A + 2B) - \sin B \sin (B + 2A) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(xix) $(\sin 3A + \sin A) \sin A + (\cos 3A - \cos A) \cos A = 0$

(xx) $\cos (36° - A) \cos (36° + A) + \cos (54° + A) \cos (54° - A) = \cos 2A$

(xxi) $\sin (45° + A) \sin (45° - A) = \dfrac{1}{2} \cos 2A$

(xxii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) . \tan\left(\dfrac{3\pi}{4} + A\right) = -1$

(xxiii) $\cot\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) . \cot\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right) = 1$

(xxiv) $1 + \tan A \tan \dfrac{A}{2} = \sec A$

(xxv) $2 \cos \dfrac{\pi}{13} \cos \dfrac{9\pi}{13} + \cos \dfrac{3\pi}{13} + \cos \dfrac{5\pi}{13} = 0$

(04) සාධනය කරන්න.

(i) $\tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$

(ii) $\cot A - \tan A = 2 \cot 2A$

(iii) $\text{coesec } 2A + \cot 2A = \cot A$

(iv) $\dfrac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A + B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A + B)} = \tan \dfrac{A}{2} \cot \dfrac{B}{2}$

(v) $\dfrac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$

(vi) $\dfrac{1 + \tan^2(45° - A)}{1 - \tan^2(45° - A)} = \operatorname{cosec} 2A$

(vii) $\tan\left[\dfrac{\pi}{4} + A\right] - \tan\left[\dfrac{\pi}{4} - A\right] = 2 \tan 2A$

(viii) $\cot(A + 15°) - \tan(A - 15°) = \dfrac{4 \cos 2A}{1 + 2 \sin 2A}$

(ix) $\dfrac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A} = \tan \dfrac{A}{2}$

(x) $\dfrac{\sin\{(n+1)A\} - \sin\{(n-1)A\}}{\cos\{(n+1)A\} + 2\cos nA + \cos\{(n-1)A\}} = \tan \dfrac{A}{2}$

(xi) $\dfrac{\sin\{(n+1)A\} + 2\sin nA + \sin\{(n-1)A\}}{\cos\{(n-1)A\} - \cos\{(n+1)A\}} = \cot \dfrac{A}{2}$

(xii) $\sin A \sin(60° - A) \sin(60° + A) = \dfrac{1}{4} \sin 3A$

(xiii) $\cos A \cos(60° - A) \cos(60° + A) = \dfrac{1}{4} \cos 3A$

(xiv) $\cot A + \cot(60° + A) - \cot(60° - A) = 3 \cot 3A$

(xv) $\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4 \sin A \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{3A}{2}$

(xvi) $4(\cos^6 A - \sin^6 A) = \cos^3 2A + 3 \cos 2A$

(xvii) $\sec^2 A (1 + \sec 2A) = 2 \sec 2A$

(xviii) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4A}} = 2\cos A$

(xix) $\tan(A-B)+\tan(B-C)+\tan(C-A)=\tan(A-B)\tan(B-C)\tan(C-A)$

(xx) $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$

(xxi) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A+B}{2}$

(xxii) $(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2 = 4\cos^2\frac{A-B}{2}$

(xxiii) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

(xxiv) $\cos^2 A+\cos^2(A+120°)+\cos^2(A-120°) = \frac{3}{2}$

(xxv) $\cos 2A\,.\,\cos 2B+\sin^2(A-B)-\sin^2(A+B) = \cos 2(A+B)$

---

(05) A, B හා C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්, පහත ඒවා ඔප්පු කරන්න.

(i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

(ii) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C = 4\cos A\cos B\sin C$

(iii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C = -1-4\cos A\cos B\cos C$

(iv) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C = 1-4\sin A\sin B\cos C$

(v) $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(vi) $\sin A+\sin B-\sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(vii) $\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(viii) $\cos A+\cos B-\cos C = -1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(ix) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2+2\cos A\cos B\sin C$

(x) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$

(xi) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

(xii) $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C$

(xiii) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(xiv) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(xv) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(xvi) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(xvii) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(xviii) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

(xix) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

(xx) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

(xxi) $\sin(B+2C) + \sin(C+2A) + \sin(A+2B) = 4 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

(xxii) $\sin(B + C - A)+\sin(C + A - B)+\sin(A + B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C$

(xxiii) $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(xxiv) $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi - A}{4} \sin \frac{\pi - B}{4} \sin \frac{\pi - C}{2}$

(xxv) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi + A}{4} \cos \frac{\pi + B}{4} \cos \frac{\pi - C}{2}$

---

(06) (i) $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$ නම්, $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\sin A = \frac{m^2 + 2mn}{m^2 + 2mn + 2n^2}$ නම්, $\tan A = \frac{m^2 + 2mn}{2mn + 2n^2}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) x තාත්ත්වික නම්, $\sin A = x + \frac{1}{x}$ විය නොහැකි බව සාධනය කරන්න.

(iv) $x = y$ විට පමණක් $\sec^2 A = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ බව පෙන්වන්න.

(v) $m = \tan A + \sin A$, $n = \tan A - \sin A$ නම්, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ බව පෙන්වන්න.

(vi) $2\tan A = 3\tan B$ නම්, $\tan(A - B) = \frac{\sin 2B}{5 - \cos 2B}$ බව පෙන්වන්න.

(vii) $\sin A + \sin B = a$ සහ $\cos A + \cos B = b$ නම්,

$\tan\frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(viii) $\cot A + \operatorname{cosec} A = 5$ නම්, $\cos A = \frac{12}{13}$ බව පෙන්වන්න.

(ix) $\sec^2 A = 2 + 2\tan A$ නම්, $\tan A = \pm\sqrt{2} + 1$ බව පෙන්වන්න.

(x) $\cos A + \cos B = \frac{1}{3}$ සහ $\sin A + \sin B = \frac{1}{4}$ නම්

$\tan\frac{A+B}{2} = \frac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න.

---

(07) සාධනය කරන්න.

(i) $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

(ii) $\tan 75° = 2 + \sqrt{3}$

(iii) $\sin 22\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}}$

(iv) $\cos 22\frac{1}{2}° = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}}$

(v) $\tan 22\frac{1}{2}° = \sqrt{2} - 1$

(vi) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(vii) $\cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

(viii) $\sin 7\frac{1}{2}° = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

(ix) $\cos 7\frac{1}{2}° = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

(x) $\tan 11\frac{1}{4}° = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

(xi) $\sin^2 72° - \sin^2 60° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(xii) $\cos^2 48° - \sin^2 12° = \frac{\sqrt{5}+1}{8}$

(xiii) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$

(xiv) $\sin\frac{\pi}{10} + \sin\frac{13\pi}{10} = -\frac{1}{2}$

(xv) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10} = -\frac{1}{4}$

(xvi) $\sin^2 24° - \sin^2 6° = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$

(xvii) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = \frac{1}{16}$

(xviii) $\tan 6° \tan 42° \tan 66° \tan 78° = 1$

(xix) $\cos 12° \cos 24° \cos 48° \cos 84° = \frac{1}{16}$

(xx) $\sin 36° \sin 72° \sin 108° \sin 144° = \frac{5}{16}$

(xxi) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}$

(xxii) $\cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° = \frac{1}{16}$

---

(08) (i) $(1 - \cos A)(1 + \sec A) \equiv \sin A \tan A$ (ii) $\operatorname{cosec} A - \sin A \equiv \cot A \cos A$

(iii) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) \equiv \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(iv) $\cot\theta + \tan\theta \equiv \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

---

(09) (i) $\sin\theta\cos\theta / \cos^2\theta - \sin^2\theta \equiv \tan\theta / (1 - \tan^2\theta)$ බව

(ii) $(1 - \sin^2 A)(1 + \tan^2 A) \equiv 1$ (iii) $\frac{1 - 2\cos^2 A}{\sin A \cos A} \equiv \tan A - \cot A$

---

(10) (i) $\sin A \cos A (\tan A + \cot A) \equiv 1$ (ii) $\frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} \equiv \sec\theta - \tan\theta$

(iii) $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} \equiv \sin A + \cos A$

(iv) $\tan^2\theta + \cot^2\theta \equiv \sec^2\theta + \operatorname{co\,sec}^2\theta - 2$

(11) (i) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \equiv \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ (ii) $\dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \equiv 1 - \sin\theta\cos\theta$

(iii) $(2r\sin\theta\cos\theta)^2 + r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 \equiv r^2$

(iv) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} \equiv \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

---

(12) (i) $(\sec^2\theta + \tan^2\theta)(\mathrm{cosec}^2\theta + \cot^2\theta) \equiv 1 + 2\sec^2\theta\,\mathrm{cosec}^2\theta$

(ii) $\sec^2 A \equiv \dfrac{\mathrm{cosec}\,A}{\mathrm{cosec}\,A - \sin A}$

(iii) $(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2 \equiv 2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$

---

(13) (i) θ වලින් ලියන්න. (*a*) $\sin\overline{\theta - 90}$ (*b*) $\cos\overline{\theta - 90}$

(*c*) $\sec -\overline{\theta - 90}$ (*d*) $\cos -\overline{180 - \theta}$ (*e*) $\sin -\overline{270 - \theta}$

(*f*) $\tan\overline{\theta - 360}$ (*g*) $\sin\overline{540 + \theta}$ (*h*) $\tan\overline{270 - \theta}$

(*i*) $\tan\overline{270 + \theta}$ (*j*) $\cos -\overline{450 - \theta}$ (*k*) $\sin -\overline{540 - \theta}$

---

(14) sin, cos, tan වල අගය සොයන්න.

(i) $120°$ (ii) $210°$ (iii) $315°$ (iv) $-135°$ (v) $-240°$ (vi) $-330°$ (vii) $-300°$

---

(15) (i) $\dfrac{2\sqrt{2}\sin 135° + 4\sqrt{3}\cos 150°}{7\sqrt{3}\cos 120° - 3\tan 150°} = \dfrac{8\sqrt{3}}{15}$

(ii) $\dfrac{4\sqrt{2}\cos 210° + 3\sqrt{3}\cot 120°}{6\sqrt{3}\cos 240° - 2\sqrt{3}\sin 210°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

---

(16) සුළු කරන්න.

(i) $\dfrac{2\sin 150° + 4\sqrt{3}\cos 150°}{4\sqrt{3}\cos 300° + 2\cos 240°} = \dfrac{5}{13}(2\sqrt{3} + 1)$

(ii) $\dfrac{4\sqrt{3}\cos 240° - 2\cos 330°}{-7\sqrt{2}\cos 765° - 3\sqrt{3}\tan 300°} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(17) (i) $\dfrac{4\sqrt{3}\cos 780^\circ + 2\sqrt{2}\cos 1125^\circ}{-4\sin 930^\circ} = \sqrt{3} + 1$ බව

(ii) $\dfrac{7\sqrt{3}\sec 600^\circ - 4\cot 330^\circ}{-4\sqrt{2}\operatorname{cosec} 405^\circ} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

---

(18) (i) $\dfrac{\tan^2 A + \cos^2 A}{\sin A + \sec A} \equiv \sec A - \sin A$

(ii) $\cos^3\theta - \sin^3\theta \equiv (\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta)$

(iii) $\cos^4\theta - \sin^4\theta \equiv 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

---

(19) (i) $(\tan x + \tan y)(1 - \cot x\cot y) + (\cot x + \cot y)(1 - \tan x\tan y) \equiv 0$

(ii) $(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 + (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 \equiv x^2 + y^2$

---

(20) (i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} \equiv \sec A - \tan A$ (ii) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} \equiv 2\operatorname{cosec} A$

(iii) $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} \equiv 2\sec^2 A$

(iv) $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\cot A + \tan A} \equiv \cos A$

---

(21) θ ඉවත් කර සුළු කරන්න.

(i) $x = 4\sec\theta,\quad y = 5\tan\theta$ (ii) $x = a\operatorname{cosec}\theta,\quad y = b\cot\theta$

(iii) $x = 2\tan\theta,\quad y = 3\cos\theta$

---

(22) θ ඉවත් කර x, y සම්බන්ධතාවය ලබාගන්න.

(i) $x = 1 - \sin\theta,\quad y = 1 + \cos\theta$ (ii) $x = 2 + \tan\theta,\quad y = 2\cos\theta$

(iii) $a = 2\cos\theta + 3\sin\theta,\quad b = 3\cos\theta + 2\sin\theta$

(iv) $a = 2\tan\theta + \sec\theta,\quad b = \tan\theta + 2\sec\theta$

(23) සරල කරන්න.

(i) $\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{1-\sin^2\theta}$ (ii) $\dfrac{1}{\cos\theta\,(1+\cot^2\theta)}$ (iii) $\dfrac{1-\sec^2\theta}{1-\mathrm{cosec}^2\,\theta}$

(iv) $\dfrac{\mathrm{cosec}\,A}{\mathrm{cosec}\,A-1} + \dfrac{\mathrm{cosec}\,A}{\mathrm{cosec}\,A+1} = 2\sec^2 A$ බව

(v) $\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A} \equiv \dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}$ බව පෙන්වන්න.

---

(24) θ ඉවත් කරන්න.

(i) $a = 1+\sin\theta+\cos\theta,$ $b = 2-\sin\theta+\cos\theta$

(ii) $a = \tan\theta+\cot\theta,$ $b = \sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\,\theta$

---

(25) $\tan 25 = a$ නම්,

(i) $(\tan 155 - \tan 115) / (1 + \tan 155 \tan 115)$

(ii) $(\tan 205 - \tan 15) / (\tan 245 - \tan 335)$ අගය සොයන්න.

---

(26) θ දෙවන වෘත්ත වාදයේ ද, $\tan\theta = -2/3$ නම්,

(a) $\dfrac{\sin\overline{90-\theta} - \cos\overline{180-\theta}}{\tan\overline{270+\theta} + \cot\overline{360-\theta}} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}}$

(b) $\dfrac{\tan 90+\theta + \cos 180+\theta}{\sin(270-\theta) - \cot(-\theta)} = \dfrac{2+\sqrt{13}}{2-\sqrt{13}}$ බව

---

(27) ධන සුළු කෝණ වලින් දනක්වන්න.

(i) $\sin 145^\circ$ (ii) $\cos 215^\circ$ (iii) $\tan 240^\circ$ (iv) $\sec 325^\circ$

(v) $\cos(-240)^\circ$ (vi) $\tan(-1385)^\circ$ (vii) $\cot 610^\circ$ (viii) $\sin(-1385)^\circ$

(28) (i) $\sin A = 1/3$ නම් ද A සුළු කෝණයක් නම් ද වක්‍ර භාවිතා නොකර $\cos A$ හා $\cot A$ සොයන්න.

(ii) සුළු කරන්න.

(a) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (b) $\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ (c) $\dfrac{1}{\cos\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}}$

---

(29) (i) $A \neq B$ විට, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos A}{\cos B}$ නම්, $\dfrac{x\tan A + \tan B}{x+y} = \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$ බව

(ii) $2\sin^2 x + 4\cos^2 x + 6\sin x\cos x$ හි උපරිම හා අවම අගය $3+\sqrt{10}$ සහ $3-\sqrt{10}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $3\cos\theta + 5\cos\theta = 5\ (0<\theta<\pi/2)$ නම් $5\sin\theta - 3\cos\theta = 3$ බව පෙන්වන්න.

---

(30) (i) $\dfrac{\sqrt{3}\cos 20 - \sin 20}{\sin 20\cos 20} = 4$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $A + B = \pi/4$ නම්, $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\dfrac{\sin 3\theta - \sin\theta\sin^2 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta} = \cos 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

---

(31) (i) $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(ii) $\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$

(iii) $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ (iv) $\dfrac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2\sec A\tan A + 2\tan^2 A$

---

(32) (i) $\dfrac{\tan A}{1-\cot A} - \dfrac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A\,\mathrm{cosec} A + 1$

(ii) $\sec^4 A - \sec^2 A = \tan^4 A + \tan^2 A$

(iii) $\sqrt{\mathrm{cosec}^2 A - 1} = \cos A\,\mathrm{cosec} A$

(iv) $\cot^4 A + \cot^2 A = \mathrm{cosec}^4 A - \mathrm{cosec}^2 A$

(33) (i) $\sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2$ (ii) $\tan^2 A - \sin^2 A = \sin^4 A \sec^2 A$

(iii) $(1 - \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

(iv) $\dfrac{\cot A \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A \cos A}$ (v) $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \tan A$

(vi) $\tan A\,(1 - \cot^2 A) + \cot A\,(1 - \tan^2 A) = 0$

---

(34) (i) $\sin^8 A - \cos^8 A = (\sin^2 A - \cos^2 A)(1 - 2\sin^2 A \cos A)$

(ii) $\tan A + \sin A = m$, $\tan A - \sin A = n$ නම්, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \dfrac{1 + \sin A}{\cos A}$

(iv) $\sin A / \sin B = \sqrt{2}$, $\tan A / \tan B = \sqrt{3}$ නම්, A ත් B ත් සොයන්න.

(v) $\dfrac{\sin A}{\sin B} = p$, $\dfrac{\cos A}{\cos B} = q$ නම්, $\tan A$, $\tan B$ සොයන්න.

---

(35) (i) $(\sin A + \sec A)^2 + (\cos A + \operatorname{cosec} A)^2 = (1 + \sec A \operatorname{cosec} A)^2$

(ii) $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 7$

(iii) $2\sec^2\alpha - \sec^4\alpha - 2\operatorname{cosec}^2\alpha + \operatorname{cosec}^4\alpha = \cot^4\alpha - \tan^4\alpha$

---

(36) (i) $\sin(\pi/4 + A) + \sin(\pi/4 - A) = \sqrt{2}\cos A$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\dfrac{\sin(A + B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\sin(\theta + 60) = \sin(120 - \theta)$ බව පෙන්වන්න.

---

(37) (i) $\tan(x + y) - \tan x = \dfrac{\sin y}{\cos x \cos(x + y)}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\cos(45 - \theta) = \sin\overline{\theta + 30}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $(\sin A + \cos A)(\sin B + \cos B) = \sin(A + B) + \cos(A - B)$ බව පෙන්වන්න.

(38) (i) $\sin 75$ (ii) $\cos 105$ (iii) $\cot(-15)$ අගය සොයන්න.

(iv) $\dfrac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$ බව පෙන්වන්න.

(v) $\tan\theta + \cot\theta = 2\operatorname{cosec} 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

---

(39) පහත දැක්වෙන අවස්ථා වලදී $\sin\overline{\alpha+\beta}, \cos\overline{\alpha+\beta}, \sin\overline{\alpha-\beta}, \cos\overline{\alpha-\beta}$ සොයා $\alpha+\beta$ හා $\alpha-\beta$ අයත් වෘත පාදය ද දෙන්න.

(i) $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\beta = 5/13$, α දෙවන වෘත පාදයේ ද β පළමු වෘත පාදයේ ද වේ.

(ii) $\sin\alpha = 2/3$, $\cos\beta = 3/4$, α දෙවන වෘත පාදයේ ද β, 4 වන වෘත පාදයේ ද වේ.

---

(40) (*a*) $\sin 45 + \theta - \sin\overline{45-\theta} = \sqrt{2}\sin\theta$ (*b*) $\sin 30 + \theta + \cos\overline{60+\theta} = \cos\theta$

(*c*) $\cot\overline{\alpha+\beta} = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

(*d*) $\cot\overline{\alpha-\beta} = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta\cot\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

---

(41) (*a*) $\sin 15 = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ හා $\sin 292\tfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\sin 105 + \cos 105 = \cos 45$

(*c*) $\sin 75 - \sin 15 = \cos 105 + \cos 15$ බව පෙන්වන්න.

---

(42) (*a*) $\cos 3\theta - \sin 3\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(1 - 4\cos\theta\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\sec A = \cos B + \sin B$ නම්,

(i) $\tan^2 A = \sin 2B$ (ii) $\cos 2A = \tan^2(\pi/4 - B)$ බව පෙන්වන්න.

(43) (i) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $1 - \frac{1}{2}\sin 2x = (\sin^3 x + \cos^3 x) / (\cos x + \sin x)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $2\tan 2x = \dfrac{(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} - \dfrac{(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x}$

(iv) $\cos^6 x - \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ බව පෙන්වන්න.

---

(44) (i) $\dfrac{\sin \overline{A - B}}{\cos A \cos B} + \dfrac{\sin \overline{B - C}}{\cos B \cos C} + \dfrac{\sin \overline{C - A}}{\cos C \cos A} = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\tan 50 - \tan 40 = 2\tan 10$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $\tan^6\theta = \tan^4\theta\sec^2\theta - \tan^2\theta\sec^2\theta + \sec^2\theta - 1$

(v) $\sin^4 A = 3/8 - \dfrac{1}{2}\cos 2A + \dfrac{1}{8}\cos 4A$

---

(45) (i) $\tan \overline{A + B} = 1$ සහ $\tan(A - B) = 1/7$ නම්, $\tan A$ හා $\tan B$ අගය සොයන්න.

(ii) $\tan A + B = y$ සහ $\tan B = \frac{1}{2}$ නම්, $\tan A = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ බව හා $\tan(A - B)$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් x වලින් සොයන්න. $\tan(A - B) = 1/3$ හා A සුළු කෝණයක් නම්, $\hat{A}$ සොයන්න.

(iii) $\sin \overline{\alpha + \beta} = 4/5$ සහ $\sin(\alpha - \beta) = 5/13$ නම්, $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ ලෙස ලියා එමඟින් $\tan 2\alpha = 63/16$ බව පෙන්වන්න.

---

(46) $\sin\theta = \dfrac{2mn}{m^2 + n^2}$ යයි දී ඇත්නම්, θ හි සියළු ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල වර්ග ගණනය කරන්න.

---

(47) $\cos^4 A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$ යන සර්ව සාම්‍යය ස්ථාපනය කරන්න.

(48) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$ බව සාධනය කොට,
$(\sin\theta + \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$ බව අපෝහනය කරන්න.

---

(49) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\theta}$ බව සාධනය කරන්න.

---

(50) $\dfrac{\cot\theta + \tan\phi}{\cot\phi + \tan\theta} = \cot\theta\tan\phi$ බව සාධනය කරන්න.

---

(51) ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ D යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. BAD කෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකයට E හිදී BD හමු වෙයි. $AB = 2a$ නම්, $DE = (2\sqrt{3} - 3)\,a$ බව සාධනය කරන්න. එමඟින් $15°$ කෝණයෙහි ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල අගය සොයන්න.

---

(52) පහත සඳහන් ඒවා සාධනය කරන්න.

(i) $\cos A + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + A\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - A\right) + \cos(\pi + A) = 0$

(ii) $\sec\left(\dfrac{3\pi}{2} - A\right)\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right) - \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - A\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + A\right) + 1 = 0$

(iii) $\cot A + \tan(\pi + A) + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + A\right) + \tan(2\pi - A) = 0$

---

(53) (i) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ බව ඔප්පු කරන්න.

(ii) $\dfrac{\cos\theta - 1}{\sec\theta + \tan\theta} + \dfrac{\cos\theta + 1}{\sec\theta - \tan\theta} = 2(1 - \tan\theta)$ බව පෙන්වන්න.

---

(54) (i) $\tan^2 A = 1 + 2\tan^2 B$ නම්, $\dfrac{\cos A}{\cos B}$ අනුපාතය සොයන්න.

(ii) $\sec\theta - \cos\theta = a$ ද, $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = b$ නම්, $a^2b^2(a^2 + b^2 + 3) = 1$ බව ඔප්පු කරන්න.

(iii) $x = \sin\theta + \cos\theta$ හා $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $y(x^2 - 1) = 2$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $x\cos\theta + y\sin\theta = a$ හා $x\sin\theta - y\cos\theta = b$ නම්, $\tan\theta = \dfrac{ay+bx}{ax-by}$ බවත්,
$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ බවත් ඔප්පු කරන්න.

(v) $\tan\theta + \sin\theta = p$ හා $\tan\theta - \sin\theta = q$ නම්, $(p^2 - q^2)^2 = 16\,pq$ බව ඔප්පු කරන්න.

---

(55) $(1 + \sec x + \tan x)(1 + \mathrm{cosec}\, x + \cot x) = 2(1 + \tan x + \cot x + \sec x + \mathrm{cosec}\, x)$
බවත් ඔප්පු කරන්න.
$x = \pi/4$ විට මෙම ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.

---

(56) $\sin(A + B)$ ප්‍රසාරණය උපයෝගී කොට ගෙන $\cos(A - B)$ ප්‍රසාරණය අපෝහනය කරන්න.

$\sin 75° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ බව ඔප්පු කරන්න.

---

(57) $\tan(A + B + C)$ ප්‍රසාරණය කරන්න. $(A + B + C) = \pi$ නම්,
$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ බව පෙන්වන්න.

---

(58) ඔප්පු කරන්න.

(i) $\cos(A + B)\cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\sin(A + B)\sin(A - B) = \cos^2 B - \cos^2 A$

(iii) $\dfrac{\sin(B - C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C - A)}{\cos C\cos A} + \dfrac{\sin(A - B)}{\cos A\cos B} = 0$

---

(59) ඔප්පු කරන්න.

(i) $\dfrac{\sin 3A\cos 3A}{\sin A\cos A} = 2$

(ii) $\dfrac{\sin 3A + \sin^3 A}{\cos^3 A - \cos 3A} = \cot A$

(iii) $\dfrac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 + \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$

(iv) $\dfrac{\cos^6 A - \sin^6 A}{\cos 2A} = 1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2A$

(v) $\cos^6 A + \sin^6 A = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2A)$ (vi) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A$

(vii) $\frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \tan^4 A$

(vii) $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} - \frac{\cos A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2}$

---

(60) ඔප්පු කරන්න.

(i) $\frac{1}{\tan 3A - \tan A} - \frac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A$

(ii) $\cos^3 A \cos 3A + \sin^3 A \sin 3A = \cos^3 2A$

(iii) $4\sin^3 A \cos 3A + 4\cos^3 A \sin 3A = 3\sin 4A$

(iv) $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A \tan 2A \tan A$

(v) $\sin \alpha \left(1 + \tan \alpha \tan \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tan \alpha + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

(vi) $\left(\frac{\tan^2\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{\alpha - \pi}{4}\right) + 1} + \cos \frac{\alpha}{2} \cot 4\alpha\right) \sec \frac{9\alpha}{2} = \operatorname{cosec} 4\alpha$

(vii) $\frac{\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) . \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) - \sin^3\left(\frac{7}{2}\pi - \theta\right)}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} = \sin^2 \theta$

(viii) $\frac{1}{4\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \frac{(1 - \tan^2 \alpha)^2}{4\tan^2 \alpha} = 1$

---

(61) $\cot \theta = \operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta$ බව ඔප්පු කරන්න. $\cot 15° = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

---

(62) (i) $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $4\cos A \cos B \cos C$ හි අගය කොසයින හතරක එකෘයයක් සේ ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) $\sin 8\theta \sin 2\theta = \sin^2 5\theta - \sin^2 3\theta$ බව ඔප්පු කරන්න.

(iv) $\dfrac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$ බව ඔප්පු කරන්න.

(v) $\cos 10A + \cos 8A + 3\cos 4A + 3\cos 2A = 8\cos A\cos^3 3A$ බව ඔප්පු කරන්න.

(vi) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \dfrac{1}{8}$ බව ඔප්පු කරන්න.

---

(63) $\sin\theta + \sin\phi = a$ ද, $\cos\theta + \cos\phi = b$ ලෙස දී තිබෙයි.

(i) $\dfrac{a}{b} = \tan\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)$

(ii) $\dfrac{4a}{a^2 + b^2 + 2b} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \tan\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$

(iii) $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ හා $\tan\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$ යනු $(a^2 + b^2 + 2b)x^2 - 4ax + (a^2 + b^2 - 7b) = 0$ වන x හි වර්ග සමීකරණයේ මූල බව ද පෙන්වන්න.

---

(64) පහත දැක්වෙන සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(i) $\cos\theta - \cos 7\theta = \sin 4\theta$

(ii) $\sin 5\theta + \sin\theta = \sin 3\theta$

(iii) $2\cos^2\theta = 1 + \sin\theta$

(iv) $8\sin^2\theta + 6\cos\theta - 9 = 0$

(v) $\sin 7\theta - \sqrt{3}\cos 4\theta = \sin\theta$

(vi) $\cot\theta - \tan\theta = 2$

(vii) $2\sin 3\theta \sin\theta = 1$

(viii) $3\tan 2\theta + 2\tan\theta = 0$

(ix) $\sin 6\theta + \sin 2\theta + 2\cos^2 2\theta = 0$

(x) $\tan\theta + \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = 2$

(65) (i) ඔබේ පිළිතුර π මගින් දෙමින් $0 \le x \le \pi$ ප්‍රාන්තරයේ දී $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$ සමීකරණය තෘප්ත කරන x හි අගයයන් සොයන්න.

(ii) එක් ආවර්තයක් සඳහා පහත සඳහන් ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාරයන් හි කටු සටහන් අඳින්න.

(a) $f(x) = 4 + \sin x$

(b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $f(x) = 3 \sin 2x$

---

(66) (i) $0 \le \theta \le 2\pi$ දී $\sin \theta = \cos 2\theta$ සඳහා සියලුම විසඳුම් සොයන්න.

(ii) $\cos x - \sin x = R \cos (x + \alpha)$ වන සේ R ධන නියතය සහ සුළු කෝණය සොයන්න.

(a) ඒ නයින්, $\cos x - \sin x = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

(b) $\sin 2x + \cos 2x$ හි උපරිම අගය අපෝහනය කරන්න.

---

(67) (i) $0 < x < \pi$ සඳහා $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$ සමීකරණය සපුරනු ලබන x හි අගයයන් සොයන්න.

(ii) $f(x) = 3 + \cos x$, $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 3 \sin 2x$ යයි ගනිමු.

(a) f, g, h එක් එක් ශ්‍රිතයේ ආවර්තය සොයන්න.

(b) $-2\pi \le x \le 2$ ප්‍රාන්තරය මත f, g හා h ශ්‍රිතවල ප්‍රස්ථාරයන්හි දළ සටහනක් අඳින්න.

---

(68) (i) (a) $\dfrac{\sin 3A}{\cos A} + \dfrac{\cos 3A}{\sin A} = \cot A - \tan A$

(b) $\tan (45^\circ + A) - \tan (45^\circ - A) = 2 \tan 2A$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 30°$ සහ $AB = 10\ cm$ ලෙස දීඇත. AC සහ CB හි දිග සොයා ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය තීරණය කරන්න.

---

(69) $0 < C < \frac{\pi}{2}$ නම්, $\frac{1 + \sin 2C - \cos 2C}{1 + \sin 2C + \cos 2C} \tan C$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\tan \frac{\pi}{8}$ හි අගය ලබාගන්න.

---

(70) (i) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කෙටිතම පාදයෙහි දිග x ද, එම පාදයට සම්මුඛ කෝණය α ද වේ. අනෙක් පාද දෙකෙහි දිගවල එකතුව λx නම්, $\lambda \sin \alpha - \cos \alpha = 1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\cos x + \cos y = 1$ සහ $\sec x + \sec y = 4$ නම්,
$\cos x \cos y = \frac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\cos x + \cos y = 1$ සහ $\sec x + \sec y = 4$ සපුරාලන $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ ද වන පරිදි වූ x හි හා y හි අගයන් සොයන්න.

---

(71) (i) a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $a \cos x + b \sin x$ යන්න a හා b ඇසුරෙන් R සහ α දෙමින් $R \sin (x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $c^2 \leq a^2 + b^2$ නම්, a, b හා c තාත්ත්වික නියත වූ $a \cos x + b \sin x = c$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්ත්වික විසඳුම් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.
$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos x$ විසඳන්න.

(iii) $| \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x + 1 | \leq 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

---

(72) (i) $\sec \theta = \cos \theta + \sin \theta$ නම් එවිට,

(*a*) $\tan^2 \theta = \sin 2\theta$ සහ

(*b*) $\cos 2\theta = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\theta = 36°$ නම්, එවිට $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ බව පෙන්වා $\cos 36° = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) ගණිත වගු භාවිතා නොකොට $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^4 \frac{3\pi}{8}$ හි අගය සොයන්න.

---

(73) (i) $\sin 4\theta \cos 2\theta = \sin 5\theta \cos 3\theta$ සමීකරණය තෘප්ත කරන $\pi/2$ ට අඩු θ හි සියලු ධන අගයන් සොයන්න.

(ii) $5 \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 3 = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් ලබා දෙන්න.

(iii) $-\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ සඳහා, $y = \cos x + \sin x$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
$\cos x + \sin x = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} x$ සමීකරණයේ එකම මූලය $x = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

---

(74) $\cos (A + B)$ සඳහා සූත්‍රය යොදා $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ බව පෙන්වන්න.
$\cos 2\theta \tan \theta + \sin \theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.
$2 \cos^2 \theta - 2 \cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්ව සාම්‍යය සාධනය කර ඒ නයින්, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කර $\cos \frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබා ගන්න.

---

(75) (i) $\tan (\theta + \alpha) - (3 + 2\sqrt{2}) \tan \theta = 0$ නම්,
$\sin (2\theta + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$ බව පෙන්වන්න. θ සඳහා තාත්ත්වික විසඳුම් තිබීමට $\sin \alpha$ හි පරාසය ප්‍රකාශ කරන්න.
ඒ නයින්, $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - (3 + 2\sqrt{2}) \tan \theta = 0$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්, θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා
$\tan A + \tan (B + \theta) + \tan (C - \theta) = \tan A \tan (B + \theta) \tan (C - \theta)$ බව සාධනය කරන්න.

(76) (i) $s = \sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta$ නම්, $2s = \dfrac{1 - \cos 8\theta}{\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $s = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

(ii) $\cos^4\theta + \sin^4\theta = a + b\sin^2 2\theta$ ආකාරයට වන පරිදි a හා b නියත සොයන්න.

එ මඟින්, $2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 7\sin\theta\cos\theta = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

---

(77) (i) ඕනෑම x තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා

$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = \dfrac{1}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.

$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = a$ සමීකරණය විසඳිය හැකි a හි අගයන් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් 1½ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}(3/4)$ බව පෙන්වන්න. මධ්‍ය පාදයේ දිග $10\,cm$ බව දී ඇත්නම් අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.

---

(78) $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ හා $\tan 3\theta = \dfrac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan\theta$ වේ.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\theta = 2 + \sqrt{3}$ වන 0 හා $\dfrac{\pi}{2}$ අතර θ කෝණය සොයන්න.

---

(79) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \cot\dfrac{\theta}{2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි θ හි අගය 0 හෝ π හි නිඛිල ගුණාකාරයක් හෝ නොවේ. ඒ නයින්,

(i) $\cot\dfrac{\pi}{8}$ හා $\cot\dfrac{\pi}{12}$ හි අගයන් ලබාගන්න.

(ii) $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}2\theta + \operatorname{cosec}4\theta = \cot\dfrac{\theta}{2} - \cot 4\theta$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) වගු භාවිතයෙන් තොරව,

$\operatorname{cosec}\dfrac{4\pi}{15} + \operatorname{cosec}\dfrac{8\pi}{12} + \operatorname{cosec}\dfrac{16\pi}{15} + \operatorname{cosec}\dfrac{32\pi}{15} = 0$ බව සාධනය කරන්න.

(80) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan(A + B)$ බව සාධනය කරන්න.

A, B හා C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,

$\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \cot \dfrac{c}{2}$ බව අාපෝහනය කරන්න.

---

(81) සාධනය කරන්න.

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iv) $\sin^{-1} \dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

(v) $\cos^{-1} \dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x$

(vi) $\tan^{-1} \dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x$

(vii) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(viii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(ix) $\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(x) $\sin^{-1} x = \cos^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

(xi) $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

(xii) $\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

(xiii) $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$

(xiv) $\cos^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

(xv) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)$

(xvi) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - y}{1 + xy}\right)$

(xvii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right]$

(xviii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}\right]$

(xix) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - y^2}\right]$

(xx) $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{1 - y^2}\right]$

(xxi) $\cot^{-1}\left(\dfrac{ab + 1}{a - b}\right) + \cot^{-1}\left(\dfrac{bc + 1}{b - c}\right) + \cot^{-1}\left(\dfrac{ca + 1}{c - a}\right) = 0$

(xxii) $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} 3) = 15$

(xxiii) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ (xxiv) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

(xxv) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

---

(82) සාධනය කරන්න.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{1}{13} = \tan^{-1}\dfrac{2}{9}$ (ii) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$

(iii) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

(iv) $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

(v) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985} = \dfrac{\pi}{4}$

(vi) $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{70} + \tan^{-1}\dfrac{1}{99} = \dfrac{\pi}{4}$

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{m}{n} - \tan^{-1}\dfrac{m-n}{m+n} = \dfrac{\pi}{4}$

(viii) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \sin^{-1}\dfrac{8}{17} = \sin^{-1}\dfrac{77}{85}$

(ix) $\sin^{-1}\dfrac{5}{13} + \sin^{-1}\dfrac{7}{25} = \cos^{-1}\dfrac{253}{325}$

(x) $\cos^{-1}\dfrac{4}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \cos^{-1}\dfrac{33}{65}$

(xi) $\cos^{-1}\dfrac{63}{65} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{5} = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$

(xii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

(xiii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}\dfrac{3}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

(xiv) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$

(xv) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\frac{5}{13} = \frac{33}{65}$

---

(83) පහත සඳහන් ශ්‍රිත සරල කර දක්වන්න.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

(iv) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}\right)$

(vi) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$

(vii) $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$

(viii) $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

(ix) $\tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

(x) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

(xi) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2}\right)\right)$

(xii) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x}}$

(xiii) $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}\right)$

(xiv) $\sin[\tan^{-1} x^2 + \cot^{-1} x^2]$

(xv) $\sin^{-1}[x\sqrt{1 - x} - \sqrt{x}\sqrt{1 - x^2}]$

---

(84) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ නම්, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

---

(85) $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \pi$ නම්, $a + b + c = abc$ බව පෙන්වන්න.

---

(86) $\cos^{-1} a + \cos^{-1} b + \cos^{-1} c = \pi$ නම්, $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ බව පෙන්වන්න.

(87) පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x-1} + \tan^{-1}\dfrac{x-1}{x} = \tan^{-1}(-7)$

(ii) $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \dfrac{\pi}{4}$

(iii) $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan(2\operatorname{cosec} x)$

(iv) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

(v) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right) = \beta$

(vi) $\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = \dfrac{2\pi}{3}$

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} + \cot^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x} = \dfrac{\pi}{3}$, x > 0

(viii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right) - \dfrac{1}{2}\tan^{-1} x = 0$, x > 0

(xi) $\cot^{-1} x - \cot^{-1}(x+2) = \dfrac{\pi}{12}$

(x) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \dfrac{\pi}{3}$

---

(88) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

(ii) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(iii) $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

(iv) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(v) $a = b\cos C + c\cos B$

(vi) $b = c\cos A + a\cos C$

(vii) $c = a\cos B + b\cos A$

(viii) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ix) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ (x) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(xi) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (xii) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

(xiii) $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ac}}$ (xiv) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(xv) $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-b)}}$ (xvi) $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

(xvii) $\sin A = \frac{2s}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (xviii) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(xix) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$ (xx) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{b+c}\cot\frac{C}{2}$

---

(89) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$ (ii) $\sin\frac{B-C}{2} = \frac{(b-c)}{a}\cos\frac{A}{2}$

(iii) $b^2\sin 2c + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$

(iv) $a(b\cos C - c\cos b) = b^2 - c^2$

(v) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$

(vi) $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

(vii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

(viii) $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}$

(ix) $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

(x) $a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

(xi) $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{c-a\cos B}{b-a\cos C}$

(xii) $(a^2-b^2+c^2)\tan B = (a^2+b^2-c^2)\tan C$

(90) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $r = \dfrac{\Delta}{2}$

(ii) $r = (s-a)\tan\dfrac{A}{2} = (s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-c)\tan\dfrac{C}{2}$

(iii) $2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

(iv) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$

(v) $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$

(vi) $r = \dfrac{a\sin B/2\ \sin C/2}{\cos A/2}$

(vii) $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(viii) $R = \dfrac{abc}{4\Delta}$

(ix) $\Delta = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

(x) $s = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(xi) $\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s-b} + \dfrac{1}{s-c} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{4R}{\Delta}$

(xii) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{2Rr}$

(xiii) $\Delta = r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

(xiv) $\left(\dfrac{s}{a}-1\right)\left(\dfrac{s}{b}-1\right)\left(\dfrac{s}{c}-1\right) = \dfrac{r}{4R}$

(xv) $\dfrac{b^2-c^2}{2a} = R\sin(B-C)$

(xvi) $(a+b)\sec\dfrac{A-B}{2} = 4R\cos\dfrac{C}{2}$

(xvii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$

(xviii) $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(R+r)$

(xix) $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

(xx) $a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\cos(A-B) = 0$

(xxi) $a^3\sin(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B) = 3abc$

(91) (i) $0 \le x \le 2\pi$ සඳහා $4\sin^2 x + 12\sin x\cos x - \cos^2 x + 5 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නියමය** හා **කෝසයින් නියමය** ප්‍රකාශ කරන්න. $\dfrac{b+c}{2K-1} = \dfrac{c+a}{K} = \dfrac{a+b}{2K+1}$ බව දී ඇත. මෙහි k යනු 2 ට වඩා වැඩි එහෙත් 4 ට සමාන නොවන දෙන ලද නිඛිලයක් ද, a, b, c යනු ABC ත්‍රිකෝණයක, සුපුරුදු අංකනයෙන් පාද ද වේ.

$\dfrac{\sin A}{K+1} = \dfrac{\sin B}{K} = \dfrac{\sin C}{K-1}$ බව පෙන්වන්න.

K ඇසුරෙන් $\cos A$ ද ලබා ගෙන
$\dfrac{\cos A}{(K-4)(K+1)} = \dfrac{\cos B}{K^2+2} = \dfrac{\cos C}{(K+4)(K-1)}$ බව පෙන්වන්න.
මෙහි A, B, C ට සුපුරුදු තේරුම් ඇත.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2000)

---

(92) (i) ඕනෑම x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = \dfrac{3}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = a$ සමීකරණය විසඳිය හැකි a අගයයන් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද, දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් 1 ½ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

මධ්‍ය පාදයේ දිග $10\ cm$ බව දී ඇත්නම්, අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2001)

---

(93) ABC යනු, $b > c$ පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. D සහ E යනු, A හරහා මධ්‍යස්ථය AD වන පරිදි ද, AD, AE මඟින් A කෝණය ත්‍රිච්ඡේද කරන පරිදි ද BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. සුදුසු ලෙස තෝරා ගනු ලැබූ ත්‍රිකෝණ දෙකකට සයින් නියමය යෙදීමෙන්, $\cos\dfrac{A}{3} = \dfrac{b}{2c}$ බව සාධනය කරන්න.

$DE : EB = 1 : k$ නම්, $\cos\dfrac{A}{3}$ රාශිය $\dfrac{(2+k)\,c}{2\,kb}$ ට ද සමාන බව පෙන්වන්න.

$k = 1$ නම් $A = 90°$ බව ද $k = 2$ නම් $A = 135°$ බව ද අපෝහනය කරන්න.
එක් එක් අවස්ථාවේ දී, a ඇසුරෙන් b සහ c නිර්ණය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2002)

---

(94) (*a*) θ යනු $\pi/2$ හි ගුණාකාරයකට සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් විට, $x = \sin\theta - \cos\theta$ සහ $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $\sin 2\theta$
(i) x ඇසුරෙන් පමණක්, (ii) y ඇසුරෙන් පමණක් ලබා ගන්න.
ඒ නයින් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

(*b*) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = (1 + 2\cos 2x)\sin 4x$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\sin x(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x) = \sin 3x \sin 4x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*c*) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නියමය** ප්‍රකාශ කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a = b + \lambda c$ වේ. මෙහි $\lambda \in IR$
$\lambda\cos\dfrac{C}{2} = \cos\left(B + \dfrac{C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2003)

---

(95) (*a*) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ නම්, එවිට $\sin\theta\tan\theta > 2(1 - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\sin(A - B)$ හා $\cos(A - B)$ හි ප්‍රසාරණ උපයෝගී කර ගනිමින්
$\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වා,
$\tan\dfrac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*c*) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්
$\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$ බව සාධනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2004)

(96) (*a*) (i) සෑම θ සඳහා ම,
$8\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 8\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 = \cos 4\theta - \cos 3\theta$ බවත්,

(ii) 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම්, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$ බවත්, පෙන්වන්න.
$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නිතීය** ප්‍රකාශ කරන්න.
O යනු $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.
OBC හා OAB ත්‍රිකෝණවලට සයින් නිතීය භාවිත කරමින්, සම්මත අංකනයෙන්, $OB = \frac{a\sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{C\sin\theta}{\sin B}$ බව සාධනය කර,
$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2005)

---

(97) (*a*) (i) $\sin 3\theta = \cos 2\theta$ සමීකරණය විසඳීමෙන් $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ සහ $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{2}{11}$ බව පෙන්වන්න.
$\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{2}{11} + 3\tan^{-1}\frac{1}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, **කෝසයින නීතිය** අපෝහනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{6} = \frac{a+b}{7}$ බව දී ඇත.
(i) $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{2}$ (ii) $\frac{\cos A}{-1} = \frac{4\cos B}{11} = \frac{2\cos C}{7}$
බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2006)

---

(98) (*a*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

P යනු $< PAB = < PBC = < PCA = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි.
ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$\frac{abc}{2}\left[\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab}\right] \sin\phi$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{1}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) (i) $2\tan^{-1}\left[\frac{1}{5}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{5}{12}\right]$, (ii) $2\tan^{-1}\left[\frac{5}{12}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{120}{119}\right]$,

(iii) $\tan^{-1}\left[\frac{120}{119}\right] - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left[\frac{1}{239}\right]$, බව පෙන්වන්න.

$4\tan^{-1}\left[\frac{1}{5}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{1}{239}\right] = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2007)

---

(99) (*a*) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

P යනු $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන්
$\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C)$ බව
සාධනය කරන්න.

(*b*) x, y හා z යනු $x + y + z = \pi$, $\cos x + \cos y = 1$ සහ $t = \sin x + \sin y$ වන පරිදි වූ සෘණ නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

(i) $\tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}$, (ii) $0 \le t \le \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x, y හා z හි අගයන් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2008)

---

(100) (*a*) සුපුරුදු අංකනයෙන් **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට, තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. $AB = x$ වන අතර, D යනු C සිට h උසකින් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. CD මගින්, A සහ B හි දී

පිළිවෙළින් α සහ β කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

(i) $h = \dfrac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)\cos\theta}$ (ii) $d = \dfrac{x\sin(\alpha + \theta)\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

බව සාධනය කරන්න; මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

(b) (i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්,

(ii) $\tan^{-1} 1/2 - \tan^{-1} 1/3 = \sin^{-1} x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2009)

---

(101) (a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $2\left[\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c}\right] = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ බව,

(ii) $\dfrac{1}{a + c} + \dfrac{1}{b + c} = \dfrac{3}{a + b + c}$ නම් එවිට C කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R හා α තාත්ත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(c) $-1 \le x \le 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2010)

---

(102) (a) $\cos^2\theta \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(*b*) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2011:නව)

---

(103) (*a*) *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

$-1 < k < 1$ යැයි ගනිමු. *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a - b = kc$ නම්

(i) $\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right) = k\cos\left(\dfrac{C}{2}\right)$,

(ii) $\dfrac{k\sin A}{1-k\cos B} = \dfrac{a}{b}\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

(*b*) $\sqrt{3}\,(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ සමීකරණ විසඳුම් සොයන්න.

(*c*) x සඳහා විසඳන්න; $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2011:පැරණි)

---

(104) (*a*) *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.

$a = (b-c)\cos\dfrac{A}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{B-C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට

-7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(*c*) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$ යන්න, $a + b\cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2012:නව)

(105) (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c)}{2abc}$,

(ii) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{(a + b + c)^2}{2abc}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) $\sin 2\theta - 2\sin\theta - \cos\theta + 1 = 0$ හි සාධාරණ විසඳුම්, රේඩියනවලින් සොයන්න.

(*c*) $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right), \beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ හා $\gamma = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{9}\right)$ නම්,

$0 < \alpha + \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\alpha + \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2012:පැරණි)

---

(106) (*a*) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma)$
$\equiv 4\cos\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\dfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\dfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

(*b*) $f(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x + \theta) + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a\ (> 0)$, b හා $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$1 \le f(x) \le 5$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$-\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) $p > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.
ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙළින් $p + q, p$ හා $q - p$ වේ.
$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\dfrac{A - C}{2} = 2\cos\dfrac{A + C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2013)

(107) (*a*) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x+\alpha)+B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\,(>0)$, B හා $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2-\sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවද $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a:b:c = 1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda\sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2014)

---

(108) (*a*) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1+\cos x)\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\frac{f(x)}{1+\cos x} = \sqrt{2}\,\{g(x)-1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

$y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **එනයින්,** ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $a\,(b-c)\,\text{cosec}\,\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{A}{2} = (b+c)^2\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)\sec\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2015)

---

(109) (a) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha+\beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒනයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \frac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\frac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර, $(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\frac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

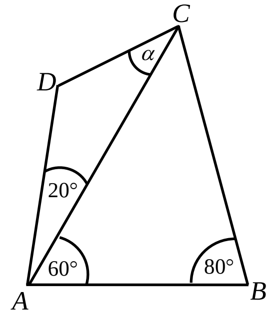
(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2016)

---

(110) (a) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\dfrac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. $A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.

මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(20° + \alpha)}{\sin \alpha}$ බව පෙන්වන්න.



$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin \alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot \alpha = \frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2017)

---

(111) (a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා,

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න;

මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු: මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2018)

---

(112) (a) sin A, cos A, sin B හා cos B ඇසුරෙන් sin ($A + B$) ලියා දක්වා, sin ($A - B$) සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$$2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B) \text{ හා}$$
$$2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $2 \sin 3\theta \cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යය AC මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{C}B = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + 2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (a) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} (x + 1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

ඒ නයින්, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2019: නව සහ පැරණි)

✦✦✦

Manoj Solangaarachchi
(*B. Sc.*)